Mean-shift, Markov Random Fields, Graph-Cut

Ing. Marek Hrúz Ph.D.
Katedra kybernetiky

Plzeň
7. října 2015

1 Mean-shift

Algoritmus Mean-shift byl navržen v roce 1975 jako metoda neparametrického odhadu hustoty pravděpodobnosti. Toto přináší výhody, protože nemusíme znát rozložení datové sady. Jediný parametr metody je velikost a tvar regionu zájmu - jádro. V praxi se používají symetrické jádra

$$K(x) = ck(\|x\|^2), \tag{1}$$

kde c je striktně kladná konstanta, která způsobí, že integrál $K(x)$ je rovný jedné. Dvě běžně používané jádra jsou **normální jádro** $K_N(x)$ a **Epanechnikove jádro** $K_E(x)$. Když je jádro středově symetrické, tak můžeme pracovat jenom s jeho profilem - 1-D reprezentaci.

Normální jádro je definováno jako

$$K_N(x) = c\exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2) \tag{2}$$

a profil

$$k_N(x) = \exp(-\tfrac{1}{2}x) \quad \text{pro } x \geq 0. \tag{3}$$

Jádro je omezeno pro velké x, abychom obdrželi jádro s konečnou odezvou. Epanechnikove jádro je difinováno jako

$$K_E(x) = \begin{cases} c(1 - \|x\|^2) & \text{ak } \|x\|^2 \leq 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{4}$$

a jeho profil

$$k_E(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{pro } x > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Mějme n vektorů x_i v d-dimenzionálním prostoru $\mathcal{R}^d$, pak vícerozměrný estimátor jádrové hustoty $\tilde{f}_{h,K}(x)$ se v bodě x vypočte jako

$$\tilde{f}_{h,K}(x) = \frac{1}{nh^d}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \tag{6}$$

kde h je šířka jádra. Protože hledáme vrcholy rozložení, musíme identifikovat extrémy jádrové funkce. To znamená, že hledáme takové místa, kde gradient estimátoru bude roven nule. Definujme tedy gradient estimátoru, neboli estimátor hustoty gradientu.

$$\nabla\tilde{f}_{h,K}(x) = \frac{1}{nh^d}\sum_{i=1}^{n} \nabla K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \tag{7}$$

a dále můžeme psát za použití profilu $k(x)$:

$$\begin{aligned} \nabla\tilde{f}_{h,K}(x) &= \tfrac{1}{nh^d}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left[ck\left(\left\|\tfrac{x-x_i}{h}\right\|^2\right)\right]' \\ &= \tfrac{1}{nh^d}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\tfrac{2c}{h^2}(x - x_i)k'\left(\left\|\tfrac{x-x_i}{h}\right\|^2\right) \\ &= \tfrac{2c}{nh^{d+2}}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)k'\left(\left\|\tfrac{x-x_i}{h}\right\|^2\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Pro zjednodušení využijeme substituci $g(x) = -k'(x)$, kde $k'(x)$ je derivace $k(x)$ podle x.

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{f}_{h,K}(x) &= \tfrac{2c}{nh^{d+2}} \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x) g \left(\left\| \tfrac{x - x_i}{h} \right\|^2 \right) \\ &= \tfrac{2c}{nh^{d+2}} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} g_i \right) \left(\tfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} - x \right), \end{aligned} \tag{9}$$

kde $\sum_{i=1}^{n} g_i$ je kladné a $g_i = g(\|(x - x_i)/h\|^2$. První výraz je vlastně estimátor s jádrem G (až na konstantu)

$$\tilde{f}_{h,G}(x) = \frac{2c}{nh^{d+2}} \sum_{i=1}^{n} g \left(\left\| \frac{x - x_i}{h} \right\|^2 \right), \tag{10}$$

druhý výraz reprezentuje mean-shift vektor $m_{h,G}(x)$ (vektor posunu střední hodnoty).

$$m_{h,G}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} - x. \tag{11}$$

Můžeme nyní zapsat iterativní výraz pro hledání lokace extrému, neboli vrcholu.

$$y_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i g(\left(\left\| \frac{y_j - x_i}{h} \right\|^2 \right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} g \left(\left\| \frac{y_j - x_i}{h} \right\|^2 \right) \tag{12}$$

2 Zkouška

2.1 Mean-shift

2.1.1 Co to je?

Neparametrická metoda odhadu hustoty pravděpodobnosti.

2.1.2 Na co to je?

Na vstupu jsou realizace náhodného proces v podobě vektorů. Mean-shift odhadne pro libovolné x hodnotu hustoty pravděpodobnosti. Můžeme uvažovat, že lokální maxima tohoto odhadu představují centroidy zhluků, které vznikli realizací náhodného procesu. Matematicky lze odvodit, že lokální maxima lze detekovat pomocí iteračního algoritmu a zároveň určit příslušnost vektorů k danému zhluku.

2.2 Markov random fields

2.2.1 Co to je?

Je náhodné pole reprezentované jako graf. Musí splňovat pozitivitu a musí mít Markovskov vlastnost.

2.2.2 Na co to je?

Vhodná reprezentace obrazu, která umožňuje segmentaci oblastí. V této reprezentaci lze segmentaci převést na úkol minimalizace energie konfigurace pole - ekvivalence mezi MRF a Gibbsovým rozložením.

2.3 Graph-Cut

2.3.1 Co to je?

Metoda pro určení minimálního řezu grafu.

2.3.2 Na co to je?

Metoda na základě řezu grafu řeší minimalizaci energie definované pomocí MRF. Přidáva do grafu další uzly, které reprezentují třídy oblastí. Řez je realizován tak, aby oddělil tyto uzly od sebe a jeho cena byla minimální.

Reference